電磁気学復習ノート

山影 相

2017 年 7 月 24 日

概要

一度，電磁気を学んだ読者を想定している．

目次

1　ベクトル解析

以下にベクトル解析の公式をリストする.

球座標：

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_z \cos\theta, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x \cos\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\sin\phi - \boldsymbol{e}_z \sin\theta, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi,\ \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{e}_\theta,\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi} = \boldsymbol{e}_\phi \sin\theta, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{e}_r,\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\phi} = \boldsymbol{e}_\phi \cos\theta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\theta} = 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi} = -\boldsymbol{e}_r \sin\theta - \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{8}$$

円筒座標：

$$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_x \cos\phi + \boldsymbol{e}_y \sin\phi, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\rho,\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\phi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\phi} = \boldsymbol{e}_\phi,\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi} = -\boldsymbol{e}_\rho, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{14}$$

点電荷:

$$\Delta \frac{1}{r} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

曲面 $\boldsymbol{d}(u,v)$ の微小面積要素:

$$d\boldsymbol{S} = dudv \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial v}. \tag{16}$$

例として，球面の面積を上式より求める．球面は 2 つのパラメタ $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ を用いて $d_x = a\sin\theta\cos\phi$, $d_y = a\sin\theta\sin\phi$, $d_z = a\cos\theta$ と表示できるので，球面の面積は

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \left| \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial \phi} \right| = 4\pi a^2. \tag{17}$$

なお，$d\boldsymbol{S}$ は向きがあるので，$\boldsymbol{d}(u,v)$ が u と v に関して単調な関数であれば簡単であるが，そうでない場合は注意が必要である．

2 多極子展開

原点に点電荷 q が置かれている場合の静電ポテンシャル $\phi_0(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}, \tag{18}$$

であるが，実際には厳密に“点”ということはなく，適当な電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ で表されるのが普通である．この電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ がつくる静電ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{19}$$

となる．勿論，$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r})$ とすれば式 (18) が再現される．

さて，しばしば，電荷はある有限の領域 Ω 内にのみ分布しており $[\rho(\boldsymbol{r} \notin \Omega) = 0]$，それが十分遠方 $(r \to \infty)$ につくる静電ポテンシャルが問題になる．例えば，物質に電場を印加する，といった状況である．こうした場合には $r > r'$ として式 (19) の被積分関数を $1/r$ に関して冪展開することが許される．その結果は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon r^{n+1}} \int d^3r' \rho(\boldsymbol{r}') r'^n P_n(\cos\theta_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}), \tag{20}$$

である．$\theta_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角であり，P_n はルジャンドル多項式である．低次のものを具体的に書き下すと

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},\ P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \tag{21}$$

であり，それぞれ対応する静電ポテンシャル $\phi_0(\boldsymbol{r}), \phi_1(\boldsymbol{r}), \phi_2(\boldsymbol{r}), \phi_3(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r},\ q = \int d^3r \rho(\boldsymbol{r}), \tag{22}$$

$$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon r^3},\ \boldsymbol{p} = \int d^3r\, \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}), \tag{23}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{3}{2}\frac{x_i x_j q_{ij}}{r^5},\ q_{ij} = \int d^3r \left(x_i x_j - \frac{r^2}{3}\delta_{ij}\right)\rho(\boldsymbol{r}), \tag{24}$$

$$\phi_3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{x_i x_j x_k o_{ijk}}{r^7}, \tag{25}$$

$$o_{ijk} = \int d^3r \left(\frac{5}{2}x_i x_j x_k - \frac{r^2}{2}x_i\delta_{jk} - \frac{r^2}{2}x_j\delta_{ki} - \frac{r^2}{2}x_k\delta_{ij}\right)\rho(\boldsymbol{r}), \tag{26}$$

と与えられる．この形から明らかなように，ϕ_0 は点電荷 q，ϕ_1 は双極子モーメント $\boldsymbol{p}$，ϕ_2 は四極子モーメント q_{ij}，ϕ_3 は八極子モーメント o_{ijk} がつくるポテンシャルになっていることが分かる．これらの多極子モーメントは系の対称性により多くの成分が零になる．例えば電荷分布が空間反転対称性を有している場合，$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(-\boldsymbol{r})$，には全ての奇数次のモーメントが零になる．

3　静電場

この節では $\epsilon_0 = 1$ とおく．

3.1　ガウスの法則

電荷分布 $\rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとする．“与えられた” の意は，電荷分布 $\rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ は何らかの方法で固定されており，電場を印加しても変化しない，ということである．そのような電荷分布が誘起する静電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ を決定するガウスの法則は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}) = \rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}), \tag{27}$$

と微分形で表される．これはマクスウェル方程式の第 1 式である．その解は $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ であり，静電ポテンシャル $\phi_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{28}$$

である．

証明

静電場 $\boldsymbol{E}$ はポテンシャル ϕ により，$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ であるから，ガウスの法則は

$$\Delta\phi = -\rho, \tag{29}$$

というポアソン方程式を与える．その一般解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') + \phi_0(\boldsymbol{r}), \tag{30}$$

の形に与えられる．ここで G は $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r})$ を満たすグリーン関数であり，ϕ_0 は調和関数, $\Delta\phi_0 = 0$, である．無限遠方には電場は無いとすると，$\phi_0 = 0$ である．

グリーン関数をフーリエ展開

$$G(\boldsymbol{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} G_{\boldsymbol{k}}, \tag{31}$$

により解こう．デルタ関数は

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{32}$$

と表現できるので，グリーン関数は

$$G_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{k^2}, \tag{33}$$

である．

$$G(\boldsymbol{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{2\pi}\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\frac{\sin(kr)}{\pi kr}. \tag{34}$$

積分公式

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}, \tag{35}$$

を用いると，グリーン関数が

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi r}, \tag{36}$$

と求められる．結局，静電ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') = \int \frac{d^3r'}{4\pi}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{37}$$

となることが分かる．

証明は以上で終わりであるが，幾つか性質を観察しておく．$1/r$ の微分は直接計算できるので，

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},\ \Delta\frac{1}{r} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{3\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = 0, \tag{38}$$

となり，$\Delta(1/r)$ が零のように見えるが，これは特異点 $r=0$ を除いたときの話である．すなわち，上の計算は

$$\Delta\frac{1}{r} = 0 \text{ for } r \neq 0, \tag{39}$$

を意味している．さらに，これを半径 r の球で積分すると

$$\int d^3r \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = \int d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = -\int d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -4\pi, \tag{40}$$

であり，有限値になる．これはすなわち，

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}), \tag{41}$$

に他ならない．

証明終

3.2 電気分極と誘導電荷

次に電荷分布 $\rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ の他に誘電体が存在する場合を考える．電荷分布 $\rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r})$ は変化しないが，それがつくる電場により，誘電体内の電荷分布は $\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})$ だけ変化し，系全体の電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}) + \rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}), \tag{42}$$

となる．誘起された電荷分布 $\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})$ はさらに電場を誘起するが，これを $-\boldsymbol{P}$ とし，系全体の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}), \tag{43}$$

と表す．すなわち，$\boldsymbol{P}$ は電場に対する誘電体の応答であり，電気分極と呼ばれる．最終的な電場の分布はやはりガウスの法則を満たすから

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=-\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}), \tag{44}$$

が成立する．

一様な誘電体では誘導電荷 ρ_{in} はその表面のみに現れる．電気分極は誘電体の内部では $\boldsymbol{P}$ という一定値をとり，外部では零である．すると，表面を除けば $\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=0$ である．$\boldsymbol{r}$ が表面 (平坦とする) 上にあるとし，その面の法線方向を $x_\perp$ とすると $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{P}\theta(r_\perp-x_\perp)$ であり，

$$\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})=-\frac{\partial P_\perp(\boldsymbol{r})}{\partial x_\perp}=P_\perp(\boldsymbol{r})\delta(r_\perp-x_\perp), \tag{45}$$

つまり，面密度 $\rho_{\mathrm{in}}^{\mathrm{2D}}(\boldsymbol{r})=P_\perp(\boldsymbol{r})$ の電荷が表面に誘起される．

次に，電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ がつくる電場がどうなるかを考えよう．ガウスの法則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=-\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})$ により，静電ポテンシャル $\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})$ は

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\&=\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3},\end{aligned} \tag{46}$$

と変形できる．一方，$\boldsymbol{r}'$ に位置する電気双極子 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')$ がつくるポテンシャルは (23) 式より

$$\phi_{\mathrm{dipole}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}, \tag{47}$$

である．上の 2 式から，電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ は電気双極子の密度と解釈できる．すなわち，$\boldsymbol{r}$ の周りの微小領域に存在する電気双極子は $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})d^3r$ である．

ところで，電気双極子の定義を思い起こすと $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})d^3r$ であるが，一様な誘電体では $\rho(\boldsymbol{r}\notin\partial\Omega)=0$ であったから，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}\notin\partial\Omega)=\boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}\notin\partial\Omega)=\boldsymbol{0}$ となり，なにかおかしい，と思うかもしれない．実は，この議論においては巨視的・微視的といった 2 つのスケールを行き交っているために話が少し難しくなっている．誘電体は巨視的には，表面 $\partial\Omega$ を除けば，電荷中性 $\rho^{\mathrm{macro}}(\boldsymbol{r}\notin\partial\Omega)=0$ である．しかし，原子スケールで見れば原子軌道やイオンの分極が生じており，微視的な電荷分布は誘電体の内部でも有限 $\rho^{\mathrm{micro}}(\boldsymbol{r}\in\Omega)\neq 0$ となっている．ただし，これを粗視化すると

$$\rho^{\mathrm{macro}}(\boldsymbol{r})=\int_{\boldsymbol{r}}\frac{d^3r'}{\Delta V}\rho^{\mathrm{micro}}(\boldsymbol{r}')=0, \tag{48}$$

でなければならない．ここで積分は $\boldsymbol{r}$ の周りの体積 ΔV の適当な領域で行われる．結晶であれば，この粗視化を行う適当な領域は基本単位胞であろう．このとき，電気分極は

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}} \frac{d^3r'}{\Delta V}\boldsymbol{r}'\rho^{\mathrm{micro}}(\boldsymbol{r}'), \tag{49}$$

のように，単位体積あたりの「微視的な」電気双極子として与えられるのである．このようにして，（巨視的な）電荷分布は零であるが（微視的な）電気双極子および（巨視的な）電気分極は有限，という状況を実現できる．

3.3　クラウジウス・モソッティの関係式

前節で導入した，誘電体の巨視的な応答を表す電気分極 $\boldsymbol{P}$ は微視的な電荷分布が構成する電気双極子 $\boldsymbol{p}$ を粗視化したものである，すなわち，$\boldsymbol{P} = (\Delta V)^{-1}\int_{\Delta V} d^3r\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}/\Delta V$, という考え方は，誘電体の誘電率 ϵ を微視的に評価する方法を与える．例えば，球状の誘電体（結晶）の比誘電率 ϵ は，微視的な電気双極子 $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$ の分極率 α を用いて

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\Delta V}, \tag{50}$$

と評価できる．ここで $\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$ は微視的な（局所）電場である．これをクラウジウス・モソッティの関係式と呼ぶ．以下にその導出を示す．

半径 a の誘電体球が原点に存在しており，これに外部電場 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{e}_z$ を印加し，誘電体内には一様に電気分極 $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}_z$ が生じたとする．まず，この系の巨視的な応答を議論し，電気分極と外部電場の関係を決める．次に微視的な電気双極子と外部電場の関係を議論し，最終的にこれらを繋ぐ（外部電場を消去する）ことでクラウジウス・モソッティ関係式が得られる，という流れである．

この系の静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}), & r < a, \\ \phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r}), & r > a, \end{cases} \tag{51}$$

と 2 つの領域に分けられる．誘電体がつくる静電ポテンシャルは，十分に遠方においては電気双極子 $\boldsymbol{p} = 4\pi a^3\boldsymbol{P}/3$ がつくるもの，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/(4\pi r^3)$，と同じであるから，外部電場と合わせて，

$$\phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r})|_{r\gg a} \sim -E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi r^2} = -E_0 r\cos\theta + \frac{a^3}{3r^2}P\cos\theta, \tag{52}$$

である．一方，球座標におけるラプラス方程式の一般解のうち，軸対称 (φ 依存性が無い) のものは

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta), \tag{53}$$

という形なので，$\phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r})$ の一般形は

$$\phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r}) = -E_0 r\cos\theta + \frac{a^3}{3r^2}P\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta), \tag{54}$$

である．一方，球内では $r=0$ で電場が有限であることから

$$\phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{55}$$

の形になる．

また，ポテンシャルおよび電束密度の連続性：

$$\phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})|_{r=a} = \phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r})|_{r=a},\ \epsilon \left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{r})}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{56}$$

（ϵ は誘電率）を課すことにより，

$$A_0 = 0,\ A_1 = -E_0 + \frac{P}{3},\ a^{2n+1}A_n = B_n, \tag{57}$$

$$A_1 = -\frac{1}{\epsilon}\left(E_0 + \frac{2}{3}P\right),\ \epsilon n a^{2n+1}A_n = (-n-1)B_n, \tag{58}$$

を得る．すなわち，$A_0 = 0$, および $n \geq 2$ に対して $A_n = B_n = 0$ である．さらに，A_1 に対しては 2 つの関係式が課されている．これらより，

$$P = 3\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}E_0, \tag{59}$$

でなければならない．以上より，球内の静電ポテンシャルは

$$\phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = -\left(E_0 - \frac{P}{3}\right) r\cos\theta, \tag{60}$$

と求められる．したがって球内には

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{\boldsymbol{P}}{3}, \tag{61}$$

という一様電場が生じる．(59)・(61) 式が誘電体の巨視的応答を記述している．

次に微視的な応答である電気双極子を考察する．$\boldsymbol{r}_j$ に位置する電気双極子 $\boldsymbol{p}$ がつくる電場は

$$-\nabla\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3}=\frac{3\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)-\boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^5}, \tag{62}$$

である．結晶ではこの電気双極子が多数個並んでいる．周期性から，全ての電気双極子は同じ値をもつ．以下では最も簡単な例として立方晶を考え，立方対称位置に電気双極子があるとする．これらの電気双極子が，ある立方対称点 ($\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ と定める) につくる電場 $\boldsymbol{E}_3$ の第 μ 成分は

$$E_3^\mu=\sum_j\frac{3p^\nu r_j^\nu r_j^\mu-\boldsymbol{p}r_j^2}{r_j^5}. \tag{63}$$

立方対称点は反転中心でもあるから，奇数次の項は消える：

$$\sum_j\frac{r_j^\nu}{r_j^5}=0. \tag{64}$$

また，x,y,z は等価であるから，

$$\sum_j\frac{(r_j^\mu)^2}{r_j^5}=\sum_j\frac{1}{3r_j^3}. \tag{65}$$

したがって $\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{0}$ でなければならない．これは，立方対称点での微視的な局所電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}$ が

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}=\boldsymbol{E}_0, \tag{66}$$

と外部電場に一致することを意味する．これを用いると，

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0-\frac{\boldsymbol{P}}{3}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}-\frac{\boldsymbol{P}}{3}. \tag{67}$$

$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ より，$\boldsymbol{P}=(\epsilon-1)\boldsymbol{E}$ なので，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}=\frac{\epsilon+2}{3}\boldsymbol{E}, \tag{68}$$

という，微視的と巨視的を繋ぐ関係式を得る．

さて，電気分極 $\boldsymbol{P}$ は微視的な双極子を粗視化したものであったから，

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{p}}{\Delta V}=\frac{\alpha\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}}{\Delta V}, \tag{69}$$

である．ここで分極率 α を導入した．ΔV は粗視化を行う領域の体積であり，例えば結晶の単位胞であろう．以上より，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}} = \frac{\epsilon+2}{3}\boldsymbol{E} = \frac{\epsilon+2}{3}\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}} - \frac{\alpha}{3\Delta V}\boldsymbol{E}_{\mathrm{local}}\right), \tag{70}$$

であり，これを解くとクラウジウス・モソッティ関係式

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\Delta V}, \tag{71}$$

を得る．分極率 α は微視的な理論から定量的に評価することができる．例えば，量子力学により，原子軌道の分極率を計算することができる（この他にもイオンの分極など，電気双極子の要因は様々である）．分極率が分かればクラウジウス・モソッティ関係式を援用することにより，巨視的な誘電体の誘電率を決めることができる．

4　コンデンサ

２つの金属板からなる系をコンデンサと呼ぶ．片方の金属板に電荷 Q，もう片方に $-Q$ の電荷が蓄積したとき，金属板間には電圧 V が $Q = CV$ と生じる．この比例係数 C は静電容量と呼ばれ，金属板間の物質の誘電率やコンデンサの形状に依存する．

4.1　平行平板コンデンサ

最も簡単なコンデンサは面積 S の平板が距離 d だけ隔てられて平行に置かれた平行平板コンデンサである．平板は十分に大きく端の効果は無視できるものとする．このコンデンサの静電容量 C を求める．そのために，まず，平板 1 枚だけが存在し，これが電荷 Q に帯電しているときに周りにつくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求める．対称性から $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{sgn}(Qz)E_0\boldsymbol{e}_z$ である．E_0 はガウスの法則から $E_0 = Q/(2\epsilon)$ と決まる．平行平板間の電圧 V は平板間の電場と距離 d の積であるから，静電容量 $C = Q/V$ は

$$C = \frac{\epsilon S}{d}, \tag{72}$$

である．

4.2　同心球コンデンサ

半径 a と b, $a < b$, の同心球面からなるコンデンサを考える．対称性から，電場は動径 r 方向成分のみをもち，r のみに依存する： $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\boldsymbol{e}_r$．コンデンサ内 $(a < r < b)$

での電場の大きさは，内側の金属板の電荷を Q として，

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \tag{73}$$

である．したがって，コンデンサの電圧は

$$V = \int_a^b dr E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{b-a}{ab}, \tag{74}$$

で与えられることになる．すなわち，静電容量は

$$C = 4\pi\epsilon\frac{ab}{b-a}, \tag{75}$$

である，コンデンサ内の電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{ab}{b-a}\frac{V}{r^2}\boldsymbol{e}_r. \tag{76}$$

5　静磁場

静磁場の源は電流である．電流 $\boldsymbol{j}$ があるとその周りに磁場 $\boldsymbol{H}$ が

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} = 0,\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{77}$$

に従って生じる．

$\boldsymbol{\nabla}$ と $\boldsymbol{j}$ はベクトルであるから，$\boldsymbol{H}$ は軸性ベクトル（擬ベクトル）でなければならない，すなわち空間反転に対して

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \to -\boldsymbol{j}(-\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \to +\boldsymbol{H}(-\boldsymbol{r}), \tag{78}$$

と変換される．一方，時間反転に対しては

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \to -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \to -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}), \tag{79}$$

とどちらも逆向きになる．

5.1　直線電流がつくる磁場

電流 I が z 軸上を流れているとする．電流密度としては $\boldsymbol{j} = I\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z$ と書ける．それがつくる磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を求める．円筒座標が便利である．$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H_\rho\boldsymbol{e}_\rho + H_\phi\boldsymbol{e}_\phi + H_z\boldsymbol{e}_z$.

まず，z 方向の並進対称性から，磁場は z には依存しない．さらに，z 軸周りの回転対称性から H_ρ, H_ϕ, H_z は動径成分 ρ のみに依存する[*1]．また，z 軸を含む鏡映に対して，電流は不変であるが，磁場（軸性ベクトル）の鏡映面内の成分は反転するから，磁場は鏡映面の面直成分しか持たない．これはすなわち，直線電流が誘起する磁場は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H_\phi(\rho)\boldsymbol{e}_\phi, \tag{80}$$

となることを意味する．すると，$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$ を半径 ρ の円内 D で面積分することにより，

$$I = \iint_D d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H_\phi(\rho)\int_{\partial D} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_\phi = 2\pi\rho H_\phi(\rho), \tag{81}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi, \tag{82}$$

である．

5.2 円筒電流

今度は電流が半径 a の円筒上を流れているとしよう．

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j^{2\mathrm{D}}\delta(\rho - a)\boldsymbol{e}_\phi, \tag{83}$$

ここで $j^{2\mathrm{D}}$ は電流面密度であり [電流/長さ] の次元をもつ．同様に，軸周りの回転対称性から，H_ρ, H_ϕ, H_z は ρ のみに依存する．今度は xy 面に関する鏡映に対して系は不変である．並進対称性と鏡映対称性により，磁場は z 成分しかもたないことが分かる．$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H_z(\rho)\boldsymbol{e}_z$．$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$ を $z\rho$ 面で積分する．円筒を横切らない面 [(ρ,ϕ,z), $(\rho,\phi,z+\delta z)$, $(\rho+\delta\rho,\phi,z+\delta z)$, $(\rho+\delta\rho,\phi,z)$ で囲まれる面] で積分すると，ストークスの定理から

$$H_z(\rho)\delta z - H_z(\rho+\delta\rho)\delta z = 0, \tag{84}$$

であり，磁場は ρ には依存しない．また，円筒を横切る面, $\rho < a$, $\rho + \delta\rho > a$, で積分すると，

$$H_z(\rho < a)\delta z - H_z(\rho > a)\delta z = j^{2\mathrm{D}}\delta z, \tag{85}$$

[*1] 形式的に書くと，R を回転行列として $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = R\boldsymbol{H}(R^{-1}\boldsymbol{r})$ である．さらに，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\phi$, $\boldsymbol{e}_z$ はこの変換に対して不変である．

であり，円筒の内と外で，磁場が $j^{2\mathrm{D}}$ だけ異なる．一方，円筒電流の総和は零，$\int d^3r\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，であるから，無限遠方では磁場は零になる．以上より，円筒電流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=j^{2\mathrm{D}}\delta(\rho-a)\boldsymbol{e}_\phi$ がつくる磁場は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=j^{2\mathrm{D}}\theta(a-\rho)\boldsymbol{e}_z. \tag{86}$$

5.3　磁気双極子

もう少し複雑な電流分布が誘起する磁場を考察するために，ここで磁気双極子を導入する．$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を用いて変形すると，クーロンゲージ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ において

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j}, \tag{87}$$

を得る．これはポアソン方程式であるから，その解として

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{88}$$

とベクトルポテンシャルが求められる．なお，定常状態における電荷保存則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$ より，上式は確かにクーロンゲージ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ になっている．

さて，上式に表されたベクトルポテンシャルは静電ポテンシャル (20) の時と同様に多極子展開ができる．展開の初項（単極子）は恒等的に零である．

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r}\int d^3r'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{0}. \tag{89}$$

これは，電荷保存則 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ より導かれる $j_i=\boldsymbol{\nabla}\cdot(x_i\boldsymbol{j})$，及び，ある有限の領域より外側では電流は無いことを用いて

$$\int d^3r'j_i(\boldsymbol{r}')=\int d^3r'\boldsymbol{\nabla}'\cdot[x_i'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')]=\int d\boldsymbol{S}\cdot x_i\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0, \tag{90}$$

より示される．

次の項（双極子）は

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r^3}\int d^3r'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'), \tag{91}$$

であるが，先程と同様の関係式：$\boldsymbol{\nabla}'\cdot[x_i'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')]=j_i(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')+x_i'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}$ より，

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi r^3}\int d^3r'[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}]\boldsymbol{r}', \tag{92}$$

であるから，これらを平均した

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi r^3}\int d^3r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'] - [\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}]\,\boldsymbol{r}'}{2}, \tag{93}$$

という表現を考えても良い．これはあからさまに $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_1 = 0$ を満たしており，都合が良い．さらに，

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3},\ \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}), \tag{94}$$

と表すことが出来る．$\boldsymbol{m}$ は磁気双極子と呼ばれる．

5.3.1　円電流

例として，半径 a の円電流がつくる磁気モーメントを求める．円電流は $z=0$ 面を正の向きに周回しているとする．すなわち，円筒座標系において

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I\boldsymbol{e}_\phi\delta(\rho-a)\delta(z), \tag{95}$$

と表せる．系は xy 面に関する鏡映対称性をもつので，軸性ベクトルである磁気モーメントは z 成分のみをもつ．$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$ に注意して，

$$m_z = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}d\rho\rho\rho^2 I\delta(\rho-a)\delta(z) = \pi a^2 I. \tag{96}$$

5.4　トルク

まず，トルクの力学について振り返っておく．トルクは

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}, \tag{97}$$

と定義される．これは角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ の時間変化を与える．

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{T}. \tag{98}$$

また，系に微小回転 $d\boldsymbol{\theta}$ を与えると，そのエネルギー変化は

$$dU = -d\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} = -d\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{T}, \tag{99}$$

というように，トルクで与えられる．

さて，電流分布のローレンツ力について考察する．その力密度 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \tag{100}$$

であり，トルク密度は

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{j} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{B}. \tag{101}$$

例として，半径 a の円電流が磁場から受けるトルクを求める．電流密度は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I\delta\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)\delta(z)\left(-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y\right), \tag{102}$$

である．$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j} = 0$ より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \int d^3r\boldsymbol{\tau} = \int d^3r(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{j} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi a^2(\cos\phi B_x + \sin\phi B_y)I(-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y) \\
&= \pi a^2 I\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{B},
\end{aligned} \tag{103}$$

と計算される．ここで (96) 式より，上式は磁気モーメントを用いて

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}, \tag{104}$$

と表現できる．

5.5 インダクタンス

多数個のコイル 1, 2, $\cdots$, からなる系を考える．i 番目のコイルに流れている電流を I_i, コイルを貫いている磁束を Φ_i とすると，これらの間に

$$\Phi_i = L_{ij}I_j, \tag{105}$$

が成り立つ．係数行列 L はインダクタンスと呼ばれ，ビオ・サバールの法則から次のように求められる．Φ_i は

$$\Phi_i = \int_{S_i} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = \int_{\partial S_i} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}, \tag{106}$$

であり，ビオ・サバールの法則

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \sum_i \frac{\mu_0 I_i}{4\pi}\int_{\partial S_i} \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{107}$$

を代入すると

$$\Phi_i = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi}\int_{\partial S_i}\int_{\partial S_j} \frac{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{108}$$

すなわち，

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial S_i} \int_{\partial S_j} \frac{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{109}$$

と求められる．この式は i と j の入れ替えに対して対称であり，$L = L^{\mathrm{T}}$ であることが分かる (相反定理)．

また，電磁誘導によりコイル i に

$$V_i = -L_{ij} \dot{I}_j, \tag{110}$$

だけの誘導起電力が生じる．

このコイル系のエネルギーを求めよう．磁場を積分する代わりに，RL 回路を考えることによってコイルのエネルギーを導くことが出来る．各々のコイルが，独立に，RL 回路を構成 (抵抗は全て R) しており，時刻 $t = 0$ に電流 I_i が流れていたとする．時刻が経過すると電流は減衰し，その分のエネルギーがジュール熱として散逸するが，これは電流 $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \cdots)^{\mathrm{T}}$ が流れていたコイルのエネルギーに等しい．それでは，RL 回路の電流の時間発展を求める．時間発展方程式は

$$R\boldsymbol{I} = \boldsymbol{V}, \tag{111}$$

であり，その解は

$$\boldsymbol{I}(t) = \exp(-RL^{-1}t)\boldsymbol{I}, \tag{112}$$

という指数減衰である[*2]．ジュール熱の総和は, $L = L^{\mathrm{T}}$ に注意して，

$$U = \int_0^\infty dt R\boldsymbol{I}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}(t) = \int_0^\infty dt R\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \exp\left(-2RL^{-1}t\right) \boldsymbol{I} = \frac{1}{2} \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} L \boldsymbol{I}. \tag{113}$$

6　電磁場

ここまでは，電場と磁場を分けて考えてきたが，これ以降ではこれらが共存する場合を考える．電磁波などはその最たる例である．

[*2] $L_{ii} > 0$, $L_{ij} < L_{ii}, L_{jj}$ であり，L は正定値.

6.1　マクスウェルの応力

電場や磁場は物質に力を及ぼすが，これを応力の形にまとめて表すことができる．以下ではこれを議論しよう．電荷密度 $\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ と電流密度 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}/\mu_0 - \epsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}$ を用いて，系に働く全力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \int d^3x\,(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}) = \int d^3x\left[\epsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}/\mu_0)\times\boldsymbol{B} - \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\right]\\ &= \int d^3x\left[\epsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}/\mu_0)\times\boldsymbol{B} + \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E} - \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\partial t}\right], \quad (114)\end{aligned}$$

と変形できる．$\mu_0^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ を付け足して式を対称な形に表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \epsilon_0\int d^3x\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}] + \mu_0^{-1}\int d^3x\,[\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]\\ &\quad - \int d^3x\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad (115)\end{aligned}$$

となる．末項は電磁波による力である．第一項と第二項はそれぞれ，電場，磁場により生じる力である．これらをガウスの定理により，表面積分に書き換えることができる．

$$[\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}]_i = \partial_j\left[E_iE_j - \delta_{ij}\frac{E^2}{2}\right], \quad (116)$$

であり，また，磁場に対しても同じ式が成り立ち，

$$F_i = \int d^3x\partial_jT_{ji} = \int dS_jT_{ji}, \quad (117)$$

がガウスの定理から得られる．形から，T_{ij} は応力テンソルの意味をもつ．ここで，

$$T_{ij} = \epsilon_0\left[E_iE_j - \delta_{ij}\frac{E^2}{2}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_iB_j - \delta_{ij}\frac{B^2}{2}\right], \quad (118)$$

がマクスウェルの応力テンソルと呼ばれる量である．

6.2 電磁波

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0, \tag{119}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{120}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{121}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{122}$$

を四元ポテンシャル[*3]

$$(A^\mu) = (\phi/c, \boldsymbol{A}), \tag{127}$$

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\phi,\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{128}$$

により書き換えると，波動方程式

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu, \tag{129}$$

を得ることができる．$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2/c^2 - \Delta$ はダランベルシアンと呼ばれる．ただし，ポテンシャルはローレンツゲージ

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{130}$$

が選ばれている．

[*3] 四元ベクトルについて：

$$(x^\mu) = (ct, \boldsymbol{x}),\ (\partial_\mu) = (\partial_t/c, \nabla),\ (k_\mu) = (-\omega/c, \boldsymbol{k}), \tag{123}$$

$$(j^\mu) = (c\rho, \boldsymbol{j}), \tag{124}$$

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{125}$$

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu,\ V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu, \tag{126}$$

6.2.1　物質が無い場合（真空）

まずは物質が無い真空 $j^\mu = 0$ の場合を考察する．さらに，クーロンゲージ $\phi = 0$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ を選ぶと簡単である．その一般解は分散関係 $\omega_k = ck$ を用いて

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{+} + e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_k t)}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{-}\right], \tag{131}$$

である．展開係数 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm}$ は初期･境界条件により決まる．ただしクーロン条件から $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\pm} = 0$ でなければならない．ベクトルポテンシャルから電場と磁場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\dot{\boldsymbol{A}} = \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}(i\omega_k)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{+} + e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_k t)}(-i\omega_k)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{-}\right], \tag{132}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}(i\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{+} + e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_k t)}(i\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{-}\right], \tag{133}$$

と表せる．$\omega_k > 0$ であるから，第一項は $\boldsymbol{k}$ 方向に進行する波，第二項は $-\boldsymbol{k}$ 方向に進行する波，と解釈できる．

以下では単色の進行波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\right], \tag{134}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}\frac{\boldsymbol{k}}{\omega_k}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\right], \tag{135}$$

を考える．明らかに，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}/\omega_k$ であり，電場と磁場は直交している．そのエネルギー密度 $u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ は

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{\epsilon_0}{2}\mathrm{Re}\left[e^{2i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}E_k^2\right] + \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}^{*}, \tag{136}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\mathrm{Re}\left[e^{2i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}E_{\boldsymbol{k}}^2\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}^{*}\frac{\boldsymbol{k}}{k}, \tag{137}$$

と与えられる．ポインティングベクトルは $\boldsymbol{k}$ に平行である．エネルギー密度，ポインティングベクトルともに，その時間平均は第二項のみで与えられることに注意する．

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{dt}{T}u(\boldsymbol{r},t) = \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}^{*}, \tag{138}$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{dt}{T}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}^{*}\frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{139}$$

6.2.2　物質がある場合

次に物質がある場合 $j^\mu \neq 0$ を考える．ローレンツゲージにおけるマクスウェル方程式

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu,\ \partial_\mu A^\mu = 0, \tag{140}$$

は非斉次の微分方程式であり，その一般解は

$$A^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{j^\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + A_0^\mu(\boldsymbol{r}, t), \tag{141}$$

の形に書ける．A_0^μ は斉次解 $\Box A_0^\mu = 0$ であり，無限遠方に場がないなら $A_0^\mu = 0$ である．上式第一項は $\boldsymbol{r}'$ から $\boldsymbol{r}$ への影響が瞬時にではなく，光速 c で伝達してくる，という効果を表しており，遅延ポテンシャルと呼ばれている．

証明

遅延ポテンシャルの導出を以下で行う．特解 A_s を求めるにはそのグリーン関数 G;

$$\Box G(\boldsymbol{r}, t) = \delta^3(\boldsymbol{r})\delta(t), \tag{142}$$

を求めて，

$$A_\mathrm{s}^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \int d^3r' dt' G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') j^\mu(\boldsymbol{r}', t'), \tag{143}$$

と畳み込めば良い．グリーン関数を求めるには，まず，G を時間に関してフーリエ展開する．

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} G_\omega(\boldsymbol{r}), \tag{144}$$

微分方程式は

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \Delta\right) G_\omega(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}). \tag{145}$$

原点が特異点であるから，球座標を採るのが便利である．また，解は球対称であるから $r \neq 0$ として，

$$\left[-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)\right] G_\omega(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{146}$$

として良い．さらに，$G_\omega(\boldsymbol{r}) = \chi(r)/r$ とおくと，

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\chi(r) = 0, \tag{147}$$

という一次元の波動方程式に帰着される．その一般解は

$$\chi(\boldsymbol{r}, t) = \chi_+ \exp\left(i\frac{\omega}{c}r\right) + \chi_- \exp\left(-i\frac{\omega}{c}r\right), \tag{148}$$

の形をもつ．第一項は外向き，第二項は内向きの球面波に相当する．非斉次微分方程式の特解は一つだけ求めれば十分であるから，ここでは前者を選択し，$G_+(\boldsymbol{r}, t) = \chi_+ \exp(i\omega r/c)/r$ とする．χ_+ を決めるために，$\Delta r^{-1} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$ を用いてラプラシアンを計算すると，

$$\Delta G_+(\boldsymbol{r}, t) = \chi_+ e^{i\omega r/c}\left(-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{r}\right), \tag{149}$$

を得る．方程式 (146) を満たすには $\chi_+ = 1/(4\pi)$ であることが分かる．したがって，遅延グリーン関数は

$$G_+(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\frac{e^{i\omega r/c}}{4\pi r} = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}, \tag{150}$$

であり，求めるべき特解は

$$\begin{aligned} A^\mu_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}, t) &= \int \frac{d^3r'}{4\pi} dt' \frac{\delta(t - t' - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} j^\mu(\boldsymbol{r}', t') \\ &= \int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{j^\mu(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \end{aligned} \tag{151}$$

となる．

証明終

6.2.3 運動する電荷のつくる場

以上を元に，運動する電荷 q がつくる電場と磁場を求める．粒子の軌跡を $\boldsymbol{x}(t)$ とすると，電荷密度 ρ および電流密度 $\boldsymbol{j}$ はデルタ関数を用いて

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)), \tag{152}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = q\dot{\boldsymbol{x}}(t)\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)), \tag{153}$$

と表現できる．遅延ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{q\delta^3(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{x}(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c))}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{154}$$

である．デルタ関数は $\boldsymbol{x}$ に依存しており，簡単ではない．時間に関するデルタ関数を挿入して，3 次元のデルタ関数の代わりに 1 次元のデルタ関数にすると簡単になる．

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{d^3r'}{4\pi}dt'\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x}(t'))\delta\left(t'-\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right)\\ &= \int dt'\frac{1}{4\pi}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\delta\left(t'-\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{c}\right)\right). \end{aligned} \tag{155}$$

ここで，デルタ関数に関する公式

$$\delta(f(x)) = \sum_\alpha \left|\frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha}\right|^{-1}\delta(x-x_\alpha),\ f(x_\alpha)=0, \tag{156}$$

を用いる．

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[t'-\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{c}\right)\right] = 1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t'))}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|} = 1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}, \tag{157}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|},\ \boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c} \tag{158}$$

より，

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_+)|}\frac{1}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{159}$$

である．t_+ は遅延時間と呼ばれる $(\boldsymbol{r},t)$ の関数で

$$t_+(\boldsymbol{r},t) = t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_+(\boldsymbol{r},t))|}{c}, \tag{160}$$

という方程式の解である．ベクトルポテンシャルも同様であり，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{\boldsymbol{x}}(t_+)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_+)|}\frac{1}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}. \tag{161}$$

これらの解はリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルと呼ばれている．遅延効果は $\boldsymbol{\beta}=\dot{\boldsymbol{x}}/c$ に比例する．

場の計算では以下の微分が必要になる．

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial t} = 1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\frac{\partial t_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{162}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} t_\alpha &= -\boldsymbol{\nabla}\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_\alpha)|}{c} = -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|} + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{\nabla} t_\alpha \\
&= -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{n}}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}.
\end{aligned} \tag{163}
$$

$$
\boldsymbol{\nabla}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}| = \frac{\boldsymbol{n}}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{164}
$$

$$
\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\right] = \boldsymbol{\beta} + \frac{\beta^2 - (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}/c^2}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{n} \tag{165}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \frac{\partial t_\alpha}{\partial t}\dot{\boldsymbol{x}},\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}{\partial t} = \frac{\partial t_\alpha}{\partial t}\ddot{\boldsymbol{x}}, \tag{166}
$$

$$
\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|}{c\partial t} = -\frac{\partial t_\alpha}{\partial t}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{167}
$$

$$
\frac{\partial}{c\partial t}\left[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\cdot\frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{c}\right] = -\frac{\partial t_\alpha}{\partial t}\beta^2 + \frac{\partial t_\alpha}{\partial t}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\cdot\frac{\ddot{\boldsymbol{x}}}{c^2} = \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}/c^2 - \beta^2}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{168}
$$

これらを用いて面倒な計算を行うと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) - \dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|}\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\ddot{\boldsymbol{x}}/c^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}.
\end{aligned} \tag{169}
$$

を得る．第一項は，静電場に遅延効果を取り入れたものになっており，距離の二乗で減衰する．一方，第二項は加速度に比例しており，距離の一乗で減衰（長距離まで伝搬）する．これは電磁波放射に対応する．また，磁場は電場と直交し

$$
\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}}{c}, \tag{170}
$$

で与えられる．

$\boldsymbol{\beta}\to\boldsymbol{0}$ の極限を考えると，$t_+ = t$ であり，

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)|^3} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\beta}), \tag{171}
$$

となる．これは，$\boldsymbol{x}(t)$ にある点電荷がつくる電場である．すなわち，ポテンシャルは瞬時に伝搬するとみなせる．

参考文献

[1] ランダウ＝リフシッツ「場の古典論」東京図書.

[2] http://busseiqanda.la.coocan.jp/electrod.pdf