# 超伝導の基礎に関するノート

山影　相

2013 年 6 月 30 日

**概要**

BCS 理論などに関する自分用ノート.

## 目次

# 1　平均場理論

## 1.1　平均場ハミルトニアンの導入

二体相互作用をもつフェルミ粒子系を考える．ハミルトニアンは以下の通り．

$$H = -\mu c_i^\dagger c_i + c_i^\dagger t_{ij} c_j + \frac{1}{2} c_i^\dagger c_j^\dagger V_{ijkl} c_k c_l \tag{1}$$

添え字は運動量，スピン，軌道などの自由度を表す．添え字はダミーであり，またフェルミオンは反交換するから

$$V_{ijkl} = -V_{jikl} = -V_{ijlk} = V_{jilk} \tag{2}$$

を満たす．さらに，ハミルトニアンのエルミート性から

$$t_{ij} = t_{ji}^*,\ V_{ijkl} = V_{lkji}^* \tag{3}$$

という関係式を満たさなければならない．ハミルトニアン (1) は $V \neq 0$ では特別な場合を除いて厳密解を求めることは出来ない．簡便な近似法は平均場理論である．すなわち，二体相互作用を一体の場として近似的に置き換える．どのような平均場を導入するかは目的に依存する．超伝導状態は以下のような平均場理論で扱えることがバーディーン・クーパー・シュリーファーによって示された：

$$H_{\mathrm{mf}} = -\mu c_i^\dagger c_i + c_i^\dagger t_{ij} c_j + \frac{1}{2} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle V_{ijkl} c_k c_l + \frac{1}{2} c_i^\dagger c_j^\dagger V_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle - \frac{1}{2} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle V_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle \tag{4}$$

熱平均 $\langle \cdots \rangle$ には $H_{\mathrm{mf}}$ を用いる．$cc$ や $c^\dagger c^\dagger$ といった粒子数を保存しない項が現れてしまうが，上式は二次形式であり，解を求めることができる．こうした粒子数を保存しない（ゲージ対称性を破る）量 $\Delta_{ij} = V_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle$ が超伝導状態の秩序変数なのである．フェルミ粒子の反交換性 $c_i c_j = -c_j c_i$ および式 (2) から $\Delta$ は反対称性をもつ．すなわち，$\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$ を満たすことに注意．

$H_{\mathrm{mf}}$ が二次形式であることを陽に示すために南部表示 $c = (c, c^\dagger)^{\mathrm{T}}$ を導入すると

$$H_{\mathrm{mf}} = \frac{1}{2} c^\dagger \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^* \end{pmatrix} c - \frac{1}{4} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \Delta_{ij} - \frac{1}{4} \Delta_{ij}^\dagger \langle c_i c_j \rangle + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \epsilon \tag{5}$$

とシンボリックに書ける．ここで $\epsilon_{ij} = t_{ij} - \mu \delta_{ij}$ であり，また関係式 (3) を用いている．

## 1.2 電子正孔対称性

上式の行列を対角化すれば問題は解けたことになる．この行列の固有値は正と負が常に対になって現れることを以下に述べる．行列 $A$ の反ユニタリー変換 $A \to \mathcal{C}A\mathcal{C}^{-1}$,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K} \tag{6}$$

を考える．$\mathcal{K}$ は複素共役をとることを意味する．$\Delta$ の反対称性に注意すると，この変換によって

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^* \end{pmatrix} \to - \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^* \end{pmatrix} \tag{7}$$

というように負符号が付く．すなわち，正の固有値に対して，絶対値が同じである負の固有値が必ず存在する．この対称性を電子正孔（荷電共役）対称性と呼ぶ.

## 1.3 エネルギースペクトル

$H_{\mathrm{mf}}$ を対角化してエネルギースペクトルを得れば問題が解けたことになる．それには

$$\begin{pmatrix} c \\ c^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^\dagger \end{pmatrix} \tag{8}$$

というユニタリー変換をする．これは

$$c_i = u_{i\alpha}\gamma_\alpha + v_{i\alpha}\gamma_\alpha^\dagger \tag{9}$$

$$c_i^\dagger = u_{i\alpha}^*\gamma_\alpha^\dagger + v_{i\alpha}^*\gamma_\alpha \tag{10}$$

という粒子と正孔を混ぜる特異な変換になっており，ボゴリューボフ変換と呼ばれる．ユニタリー性から以下が成り立つ.

$$uu^\dagger + vv^\dagger = 1,\ uv^{\mathrm{T}} + vu^{\mathrm{T}} = 0 \tag{11}$$

また，$\gamma$ がフェルミ粒子の反交換関係 $\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 0$，$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$ に従うとし，ユニタリー性 (11) を援用すると $c$ のフェルミ統計性を再現する．すなわち，$\gamma$ はフェルミ粒子と考えて良い.

電子正孔対称性から行列の固有値は $\pm E_\alpha$ の組として現れる．正の固有値 $+E_\alpha$ に対応する固有ベクトルを $(\cdots, u_{i\alpha}, \cdots, v^*_{i\alpha}, \cdots)^{\mathrm{T}}$ とすると

$$H = \sum_\alpha E_\alpha \gamma^\dagger_\alpha \gamma_\alpha + H_{\mathrm{c}} \tag{12}$$

$$H_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\epsilon - E) - \frac{1}{4}\langle c^\dagger_i c^\dagger_j \rangle \Delta_{ij} - \frac{1}{4}\Delta^\dagger_{ij}\langle c_i c_j \rangle \tag{13}$$

とエネルギースペクトルが求められる．対角化される条件を以下に記しておく．

$$u^\dagger \epsilon u + v^{\mathrm{T}}\Delta^\dagger u + u^\dagger \Delta v^* - v^{\mathrm{T}}\epsilon^* v^* = E \tag{14}$$

$$u^\dagger \epsilon v + v^{\mathrm{T}}\Delta^\dagger v + u^\dagger \Delta u^* - v^{\mathrm{T}}\epsilon^* u^* = 0 \tag{15}$$

さて，元々のフェルミ粒子 $c$ の平均数 $\sum_i \langle c^\dagger_i c_i \rangle$ は化学ポテンシャル $\mu$ によって決まるが，新しいフェルミ粒子 $\gamma$ は基底状態からの励起を表す粒子（素励起）であり，その粒子数を指定する理由はなく（$\gamma$ 粒子の化学ポテンシャルは零），常に変動する．つまり，今考えている系の基底状態は $\gamma$ の真空（$\gamma_\alpha|0\rangle = 0$, $\forall\alpha$）として与えられ，そのエネルギー $H_{\mathrm{c}}$ は凝集エネルギーと呼ばれる．

$\gamma$ は化学ポテンシャル零のフェルミ粒子であるから，有限温度における分布は

$$\langle \gamma^\dagger_\alpha \gamma_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} f(E_\alpha),\ f(E) = \frac{1}{e^{E/T} - 1} \tag{16}$$

と与えられる．

ここで自由粒子系 $\Delta = 0$ がどのように再現されるか見ておく．$H_{\mathrm{mf}}$ は

$$H_{\mathrm{mf}} = \frac{1}{2} c^\dagger \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon^* \end{pmatrix} c + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\epsilon \tag{17}$$

となる．行列 $\epsilon$ の固有値を $\xi_\alpha$，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_\alpha$ とすると，$E_\alpha = |\xi_\alpha|$ である．すなわち，フェルミ準位より上 $(\xi_\alpha > 0)$ では $E_\alpha = +\xi_\alpha$，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\alpha \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

対応する演算子は $\gamma_\alpha = (u^{-1})_{\alpha i} c_i$．一方，フェルミ準位より下 $(\xi_\alpha < 0)$ では $E_\alpha = -\xi_\alpha$，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^*_\alpha \end{pmatrix}$$

対応する演算子は $\gamma_\alpha = (v^{*-1})_{\alpha i} c^\dagger_i$ となっている．基底状態 $|0\rangle$ は $\gamma_\alpha|0\rangle$ を満たすから，これはフェルミ準位以下の状態が全て占められ，フェルミ準位以上の状態は空であるフェルミの海を表している．

## 1.4 ギャップ方程式

これまでは $\Delta$ ありきで話を進めてきたが，$\Delta$ は $H_{\mathrm{mf}}$ の範囲で自己無撞着に決まる．$\Delta$ の定義と式 (10) から

$$\Delta_{ij} = V_{ijkl}\langle c_k c_l\rangle = V_{ijkl}\left[u_{k\alpha}v_{l\alpha}(1-f(E_\alpha)) + v_{k\alpha}u_{l\alpha}f(E_\alpha)\right] \tag{18}$$

である．反対称性 (2) から

$$\Delta_{ij} = V_{ijkl}u_{k\alpha}v_{l\alpha}\tanh\frac{E_\alpha}{2T} \tag{19}$$

とも表現できる．右辺の $u, v$ は $\Delta$ の関数として決まるから，上式は $\Delta$ を自己無撞着に決定する方程式になっている．これをギャップ方程式と呼ぶ．

## 1.5 物理量

ここでは，物理量を表す演算子（あるいは行列）の南部空間における表現を示しておく．まずはエネルギー，すなわちハミルトニアンについて確認する．ここまでで議論されてきた通り，平均場のハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{mf}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^\dagger\begin{pmatrix}\epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^*\end{pmatrix}\boldsymbol{c} \tag{20}$$

である．凝集エネルギー $H_{\mathrm{c}}$ は，しばしば省略される．ボゴリューボフ変換により，

$$H_{\mathrm{mf}} = \frac{1}{2}\sum_\alpha E_\alpha(\gamma_\alpha^\dagger\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma_\alpha^\dagger) = \sum_\alpha E_\alpha\gamma_\alpha^\dagger\gamma_\alpha \tag{21}$$

と対角化される．ただし，定数項は無視．つまり，式 (20) は 1/2 という因子をもつが，励起エネルギーは，1/2 を省いた行列

$$H_{\mathrm{BdG}} = \begin{pmatrix}\epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^*\end{pmatrix} \tag{22}$$

の固有値（の絶対値）として与えられる．系のハミルトニアンは $H_{\mathrm{BdG}}$ とし，負エネルギー解は実際の解の重複であると解釈すればよい．あるいは，$H_{\mathrm{BdG}}$ の負エネルギー解が全て満たされているのが系の基底状態である．

次に，一般的な物理量 $\mathcal{O} = c_i^\dagger O_{ij}c_j$ を考える．南部表示では

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^\dagger\begin{pmatrix}O & 0 \\ 0 & -O^*\end{pmatrix}\boldsymbol{c} \tag{23}$$

であるが，実際には上と同様にして

$$\mathcal{O}_{\mathrm{BdG}} = \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & -O^* \end{pmatrix} \tag{24}$$

の因子 1/2 を省いた行列を考えれば十分である．

例を挙げておく．全電子数は $N = \sum_i c_i^\dagger c_i = \sum_i (c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger)/2$（定数項を省いて）であるから，

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

と行列表示される．すなわち, 電子数から正孔数を引いたものであり, 自然な形になっている．状態 $i$ に電子がいれば $\langle i\mathrm{e}|N|i\mathrm{e}\rangle = 1$ であり，状態 $i$ に正孔がいれば $\langle i\mathrm{h}|N|i\mathrm{h}\rangle = -1$ である．

# 2 熱力学

自由エネルギーが分かれば比熱や臨界磁場といった熱力学量を求めることができる．まず，ユニタリー性 (11) から，凝集エネルギーが以下のように表せる．

$$H_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\epsilon - E + \frac{u^\dagger \Delta v^* + u^{\mathrm{T}} \Delta^\dagger v}{2} \tanh\frac{E}{2T}\right) \tag{26}$$

超伝導状態における自由エネルギー $F$ は

$$F = -T\,\mathrm{Tr}\ln\left(1 + e^{-E/T}\right) + H_{\mathrm{c}} \tag{27}$$

エントロピーは

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\mathrm{Tr}\left[f\ln f + (1-f)\ln(1-f)\right] - \mathrm{Tr}\left[f(E)\frac{\partial E}{\partial T}\right] - \frac{\partial H_{\mathrm{c}}}{\partial T} \tag{28}$$

内部エネルギーは

$$U = \sum_\alpha E_\alpha f(E_\alpha) + H_{\mathrm{c}} \tag{29}$$

比熱は

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial U}{\partial T} \\ &= \mathrm{Tr}\Biggl[\left(\frac{E^2}{4T^2} - \frac{E}{4T}\frac{\partial E}{\partial T}\right)\mathrm{sech}^2\frac{E}{2T} \\ &\qquad - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial T}\tanh\frac{E}{2T} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T}\left(u^\dagger \Delta v^* \tanh\frac{E}{2T}\right)\Biggr] \end{aligned} \tag{30}$$

ここで，

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 2\mathrm{ReTr}\left(u^\dagger \frac{\partial \Delta}{\partial T} v^*\right) \tag{31}$$

## 3 回転対称性

対ポテンシャル $\Delta_{ij} = V_{ijkl}\langle c_k c_l\rangle$ の対称性について議論しておく．二体相互作用は一体の波動関数を $|i\rangle$ としたとき，$V_{ijkl} = \langle i|\langle j|H|k\rangle|l\rangle$ と表せる．したがって，一般のユニタリー変換 $c_i \to U_{ij}c_j$ に対して $|i\rangle = c_i^\dagger|0\rangle \to U^*_{ii'}c^\dagger_{i'}|0\rangle = U^*_{ii'}|i'\rangle$，$V_{ijkl} \to U_{ii'}U_{jj'}V_{i'j'k'l'}U^*_{kk'}U^*_{ll'}$ と変換されることに注意すると $\Delta_{ij} \to U_{ii'}U_{jj'}\Delta_{i'j'}$，すなわち，

$$\Delta \to U\Delta U^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

と変換される．通常の物理量は $O_{ij} = \langle c_i c_j^\dagger\rangle$ という形をしており，$O \to UOU^\dagger$ と変換される．このように，対ポテンシャルは変換のされ方が異なる．特に，(適当な位相変換をしても)$U \neq U^*$ にしかならない場合に注意が必要となり，その重要な例は回転操作である．以下ではスピン自由度のみ考えよう．回転は $R = e^{-i\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\theta}/2}$ と表せる．ここで $s$ はパウリ行列であり，$\boldsymbol{\theta}$ は向きが回転軸，大きさが回転角となるベクトルである．$s_y s_i s_y = -s_i^{\mathrm{T}}$ だから，

$$R^{\mathrm{T}} = s_y R^\dagger s_y \tag{33}$$

である．つまり，

$$R\Delta R^{\mathrm{T}} = R\Delta s_y R^\dagger s_y \tag{34}$$

ここで，$\Delta = d_\mu s_\mu i s_y$ として $d$ を導入すると $R\Delta R^{\mathrm{T}} = Rd_\mu s_\mu R^\dagger i s_y$ となり，$d_\mu s_\mu$ は通常のスピンの回転操作を受ける．すなわち，

$$d_0 i s_y \to R d_0 R^\dagger i s_y = d_0 i s_y \tag{35}$$

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{s} i s_y \to R\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{s}R^\dagger i s_y = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{s}' i s_y \tag{36}$$

であり，前者はスカラー表現，後者はベクトル表現になっている．ゆえに，$\boldsymbol{d}$ は $d$ ベクトルと呼ばれている．また，$d_0$ はスピン単重項，$d_i$ はスピン三重項の成分ということになる．

この知見から，ハミルトニアン

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta^\dagger & -\epsilon^* \end{pmatrix} \tag{37}$$

をより対称性の見易い形に書き換えることができる．$U = \mathrm{diag}(1, is_y)$ というユニタリー行列によって $H \to UHU^\dagger$ と変換すると

$$H \to \begin{pmatrix} \epsilon & d_\mu s_\mu \\ d_\mu^* s_\mu & -s_y \epsilon^* s_y \end{pmatrix} \tag{38}$$

とできる．$d_\mu$ で表示できるので，対称性が一目瞭然である．また，$s_y \epsilon^* s_y$ は $\epsilon$ の時間反転になっていることに注意．これに対応して，物理量は

$$\mathcal{O} \to \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & -s_y O^* s_y \end{pmatrix} \tag{39}$$

と表示される．例えば，スピン $s_i$ は

$$s_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & s_i \end{pmatrix} \tag{40}$$

である．正孔部分が正符号であることに注意.

# 4　摂動論

平均場近似とはいっても，ギャップ方程式は非線形連立方程式であり，これを厳密に解くのは困難である．そこで何らかの量に関する摂動論を考える．例えば，超伝導転移は二次相転移であるから転移点近傍では $\Delta$ は小さい．したがって $\Delta$ に関する摂動論が便利である．さらに多体効果に関する摂動論を考えて有効相互作用を導入しても良い．こういった摂動論を議論する際にはグリーン関数を用いるのが簡便である.

グリーン関数は通常の多体摂動論と同様に

$$G_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i(\tau) c_j^\dagger \rangle \tag{41}$$

と定義する．これを行列と見なして単に $G$ と表記することもある．$c(\tau)$ の定義は $c(\tau) = e^{\tau H} c e^{-\tau H}$ および $c^\dagger(\tau) = e^{\tau H} c^\dagger e^{-\tau H}$ である [*1]．これに加えて超伝導状態では異常グリーン関数と呼ばれる以下の関数を導入する必要がある.

$$F_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i(\tau) c_j \rangle \tag{42}$$

対ポテンシャルは $\Delta_{ij} = -V_{ijkl} F_{kl}$ と書ける．以下では $\tau = 0$ は $\tau = +0$ と見なし，特に引数を明示しない場合には $F = F(+0)$ とする．$F$ は以下の反対称性を満たす.

$$F_{ij}(\tau) = -F_{ji}(-\tau) \tag{43}$$

---

[*1] 一般に，ここで定義される $c(\tau)$ と $c^\dagger(\tau)$ はエルミート共役な関係ではない.

また，$\tau$ を実数とすると $F_{ij}(\tau)$ の複素共役は

$$F^*_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c^\dagger_j(\tau) c^\dagger_i \rangle \tag{44}$$

となることに注意.

運動方程式から $G$ と $F$ の関係を見出すことができる.

$$-\partial_\tau c_i = [c_i, H] = t_{ij} c_j + V_{ijkl} c^\dagger_j c_k c_l \tag{45}$$

から，

$$-\partial_\tau G_{ij}(\tau) = \delta_{ij}\delta(\tau) + t_{ik} G_{kj}(\tau) - V_{iklm} \left\langle T_\tau c^\dagger_k(\tau) c_l(\tau) c_m(\tau) c^\dagger_j \right\rangle \tag{46}$$

$$-\partial_\tau F_{ij}(\tau) = t_{ik} F_{kj}(\tau) - V_{iklm} \left\langle T_\tau c^\dagger_k(\tau) c_l(\tau) c_m(\tau) c_j \right\rangle \tag{47}$$

を得る．右辺に現れた二体のグリーン関数を一体グリーン関数の積に切断する近似は平均場理論と等価である．ここでは，$\Delta$ に関するものだけ残して，

$$-\partial_\tau G(\tau) = \delta(\tau) + tG(\tau) + \Delta F^\dagger(\tau) \tag{48}$$

$$-\partial_\tau F(\tau) = tF(\tau) - \Delta G^*(-\tau) \tag{49}$$

である．$G, F$ の反対称性などに注意すると，上の方程式は以下の行列形式にまとめられる.

$$\begin{pmatrix} G(\tau) & F(\tau) \\ F^\dagger(\tau) & -G^*(-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_\tau - t & -\Delta \\ -\Delta^\dagger & -\partial_\tau + t^* \end{pmatrix}^{-1} \delta(\tau) \tag{50}$$

$\partial_\tau^{-1}$ の意味は振動数表示すると明らかである．すなわち，

$$G(\tau) = T \sum_n e^{-i\epsilon_n \tau} G(i\epsilon_n) \tag{51}$$

$$F(\tau) = T \sum_n e^{-i\epsilon_n \tau} F(i\epsilon_n) \tag{52}$$

と展開すると，

$$\begin{pmatrix} G(i\epsilon_n) & F(i\epsilon_n) \\ F^\dagger(-i\epsilon_n) & -G^*(i\epsilon_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\epsilon_n - t & -\Delta \\ -\Delta^\dagger & i\epsilon_n + t^* \end{pmatrix}^{-1} \tag{53}$$

と表せる．$F^\dagger$ の引数だけが $-i\epsilon_n$ となっていることに注意.

以下で，転移点近傍，すなわち $\Delta$ の最低次だけ考慮したギャップ方程式を導く．零次のグリーン関数行列を

$$\hat{g}(i\epsilon_n) = \begin{pmatrix} i\epsilon_n - t & 0 \\ 0 & i\epsilon_n + t^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (i\epsilon_n - t)^{-1} & 0 \\ 0 & (i\epsilon_n + t^*)^{-1} \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$= \begin{pmatrix} g(i\epsilon_n) & 0 \\ 0 & -g^*(i\epsilon_n) \end{pmatrix} \tag{55}$$

とおくと，$\Delta$ に関して

$$\hat{G} = \hat{g} + \hat{g}\hat{\Delta}\hat{g} + \cdots = \begin{pmatrix} g & -g\Delta g^* \\ -g^*\Delta^\dagger g & -g^* \end{pmatrix} + \cdots \tag{56}$$

と展開できる．つまり，線形化されたギャップ方程式が

$$\Delta_{ij} = V_{ijkl} T \sum_n g_{kp}(i\epsilon_n) g^*_{ql}(i\epsilon_n) \Delta_{pq} \tag{57}$$

と与えられる．松原和は以下のようにして実行できる．まず，常伝導状態のハミルトニアンを対角化しておく．この行列を $U$ とする．すなわち，

$$(U^\dagger t U)_{\alpha\beta} = \xi_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{58}$$

として，グリーン関数は

$$g_{ij}(i\epsilon_n) = \frac{U^\dagger_{i\alpha} U_{\alpha j}}{i\epsilon_n - \xi_\alpha} \tag{59}$$

と表せる．ゆえに，

$$\begin{aligned} T\sum_n g_{kp}(i\epsilon_n) g^*_{ql}(i\epsilon_n) &= U^\dagger_{k\alpha} U_{\alpha p} U^\dagger_{l\beta} U_{\beta q} T \sum_n \frac{1}{i\epsilon_n - \xi_\alpha} \frac{1}{-i\epsilon_n - \xi_\beta} \\ &= U^\dagger_{k\alpha} U_{\alpha p} U^\dagger_{l\beta} U_{\beta q} \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_\alpha + \xi_\beta} \left( \tanh\frac{\xi_\alpha}{2T} + \tanh\frac{\xi_\beta}{2T} \right) \end{aligned} \tag{60}$$

と和が与えられる．線形化されたギャップ方程式は常伝導状態のハミルトニアンを対角化する表示（バンド表示）で簡単になる．

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{V_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\xi_\alpha + \xi_\beta} \tanh\frac{\xi_\gamma}{2T} \Delta_{\gamma\delta} \tag{61}$$

ここで，

$$\Delta_{\alpha\beta} = U_{\alpha i} U_{\beta j} \Delta_{ij} \tag{62}$$

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\alpha i} U_{\beta j} V_{ijkl} U^\dagger_{k\gamma} U^\dagger_{l\beta} \tag{63}$$

これは以下の固有値問題と同じである．

$$\Delta_a = A_{ab}\Delta_b \tag{64}$$

ここで，$a=(\alpha,\beta), b=(\gamma,\delta)$ とまとめて書いている．行列 $A$ は元々のハミルトニアンの対称性をもつから，線形化されたギャップ方程式の解は系の対称群の既約表現に分解される．ただし，転移温度以下では $\Delta$ に関して非線形な方程式になるから，一般には異なる既約表現が混ざりうる．

# 5 外場に対する応答

## 5.1 スピン帯磁率

スピン 1/2 演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}/2$ は南部表示においては

$$\frac{\hat{\boldsymbol{s}}}{2} = \sum_{iss'} c_{is}^{\dagger}\frac{\boldsymbol{s}_{ss'}}{2}c_{is'} = \frac{1}{2}\sum_{iss'} c_{is}^{\dagger}\frac{\boldsymbol{s}_{ss'}}{2}c_{is'} - \frac{1}{2}\sum_{iss'} c_{is}\frac{\boldsymbol{s}_{ss'}^{\mathrm{T}}}{2}c_{is'}^{\dagger} \tag{65}$$

すなわち，

$$\hat{\boldsymbol{s}} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{66}$$

と表現される．$s$ はスピンの自由度を表し，$i$ はそれ以外の自由度を表す．$\boldsymbol{s}=(s_x,s_y,s_z)$ はパウリ行列．スピンがもつ磁化は $\boldsymbol{M} = -g\mu_{\mathrm{B}}\boldsymbol{s}/2$ である．ここで $g$ は $g$ 因子，$\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/(2m_{\mathrm{e}}c)$ はボーア磁子 [*2]，$m_{\mathrm{e}}$ は電子質量，$e>0$ は電荷素量．

### 5.1.1 帯磁率の公式

磁場 $\boldsymbol{B}$ 中での磁化 $\boldsymbol{M}$ のエネルギーは $H_{\mathrm{Z}} = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}$ である．久保公式から，動的帯磁率は

$$\chi_{\mu\nu}(\omega) = i\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\theta(t)\left\langle [M_\mu(t), M_\nu]\right\rangle \tag{67}$$

と求められる．ここで $M_\mu(t) = e^{iHt}M_\mu e^{-iHt}$．これは，対応する松原グリーン関数

$$Q_{\mu\nu}(i\nu_n) = \int_0^{1/T} d\tau e^{i\nu_n\tau}\left\langle \mathrm{T}_\tau M_\mu(-i\tau)M_\nu\right\rangle \tag{68}$$

[*2] $\mu_{\mathrm{B}} = 9.274\times10^{-24}\mathrm{J/T} = 0.0579\mathrm{meV/T} \to 0.67\mathrm{K/T}$

を $\chi(\omega)=Q(\omega+i0)$ と解析接続して求められる．

平均場近似は一体問題であるから，$Q$ の計算は以下のようにできる．

$$Q_{\mu\nu}(i\nu_n)=-\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{4}\sum_{\alpha\beta}\frac{f(E_\alpha)-f(E_\beta)}{i\nu_n+E_\alpha-E_\beta}\langle\alpha|s_\mu|\beta\rangle\langle\beta|s_\nu|\alpha\rangle \tag{69}$$

ここで $H_{\mathrm{mf}}|\alpha\rangle=E_\alpha|\alpha\rangle$ である．

#### 5.1.2　パウリ常磁性

例として自由電子系の静的帯磁率 $\chi_{\mathrm{P}}=\chi_{\mu\mu}(0)$ を考える．ハミルトニアンは

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}s}\epsilon_k c^\dagger_{\boldsymbol{k}s}c_{\boldsymbol{k}s} \tag{70}$$

と与えられる．したがって，

$$\chi_{\mathrm{P}}=-\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{4}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'ss'}\frac{f(\epsilon_k)-f(\epsilon_{k'})}{\epsilon_k-\epsilon_{k'}+i0}\langle ks|s_\mu|k's'\rangle\langle k's'|s_\mu|ks\rangle \tag{71}$$

となるが，$\langle ks|s_\mu|k's'\rangle=\delta_{kk'}\langle s|s_\mu|s'\rangle$ および $s_\mu^2=1$ に注意すると，

$$\chi_{\mathrm{P}}=-\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\lim_{\boldsymbol{k}'\to\boldsymbol{k}}\frac{f(\epsilon_k)-f(\epsilon_{k'})}{\epsilon_k-\epsilon_{k'}+i0}=\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(-\frac{\partial f(\epsilon_k)}{\partial\epsilon_k}\right) \tag{72}$$

となる．さらに $T\to 0$ の極限をとると

$$\chi_{\mathrm{P}}=\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2D_0}{2} \tag{73}$$

である．ここで $D_0$ はフェルミ準位での状態密度．なお，金属における常磁性はパウリ常磁性と呼ばれる．

#### 5.1.3　フルギャップ超伝導体の帯磁率

次に $s$ 波超伝導体の帯磁率について，特に転移温度以下の温度依存性を調べる．具体的にフルギャップのスピン一重項を考える．基底は $c=(c_{\boldsymbol{k}\uparrow},c_{\boldsymbol{k}\downarrow},-c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow},c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\uparrow})^{\mathrm{T}}$ を選ぶと便利である．この基底で，BdG ハミルトニアンは

$$H(\boldsymbol{k})=\begin{pmatrix}\xi_{\boldsymbol{k}} & \Delta\\ \Delta & -\xi_{\boldsymbol{k}}\end{pmatrix} \tag{74}$$

と書ける．ただし，スピン軌道相互作用は考えない．また，スピンは簡単に $\boldsymbol{s}\tau_0$ と表せる．ハミルトニアンがスピンに依存しないので，帯磁率は等方的である．

さて，前節の公式から，帯磁率は

$$\chi = -\frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\partial f(E_{\boldsymbol{k}})}{\partial E_{\boldsymbol{k}}} = \frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{4T}\int_0^\infty dE D(E)\,\mathrm{sech}^2\frac{E}{2T} \tag{75}$$

となる．ここで $f(E) = (e^{E/T}+1)^{-1}$ は準粒子の分布関数であり，$D(E)$ は準粒子の状態密度．積分領域が正の領域に限定できるのは電子正孔対称性の帰結である．フルギャップ超伝導では $D(0)=0$ だから，絶対零度での帯磁率は零となる．また，極低温 $T \ll T_{\mathrm{c}}$ では積分において $T \ll E$ として良いから，

$$\chi \sim \frac{g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{T}\int_0^\infty dE D(E) e^{-E/T} \sim g^2\mu_{\mathrm{B}}^2\frac{e^{-\Delta/T}}{T} \tag{76}$$

と評価され，低温では帯磁率は指数的に減衰することが分かる．

#### 5.1.4 ノードをもつ超伝導体の帯磁率

上の議論から明らかなように，準粒子の状態密度が帯磁率の温度依存性を決める．そこで，以下では超伝導ギャップにノードがある場合を考えよう．ポイントノードのまわりのエネルギーが $E(k) \propto k$, $k = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} k_i^2}$ とすると，その状態密度は

$$D(E) \propto E^{d-1} \tag{77}$$

である．ここで $d$ は空間次元．また，ラインノードの周りのエネルギーが $E(k) \propto k_\parallel$, $k_\parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} k_i^2}$ とすると，対応する状態密度は

$$D(E) \propto E^{d-2} \tag{78}$$

である．一般に，ノードがあると状態密度は代数的である．ノードの次元を $d_{\mathrm{n}}$ とすると，$D(E) \propto E^{d-d_{\mathrm{n}}-1}$ とも書ける．したがって帯磁率は低温で [*3]

$$\chi \propto -\int_0^\infty dE D(E)\frac{\partial f}{\partial E} \propto T^{d-d_{\mathrm{n}}-1} \tag{80}$$

と代数的に減衰する．

---

[*3] 以下の関係式を用いる．

$$\int_0^\infty dE\frac{E^\alpha}{e^{E/T}+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^\infty dE E^\alpha e^{-(n+1)E/T} = \alpha! T^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{\alpha+1}} \tag{79}$$

右辺の無限級数はゼータ関数で表すこともできるが，数係数はここでは重要ではない．

#### 5.1.5　ナイトシフトとスピン－格子緩和

帯磁率を測定する有用な方法の一つとして NMR を挙げることができる．系を構成する原子の核は（同位体も含めて）それ自身がスピンをもっていることがある．磁場中の磁気モーメントは歳差運動をするが，その振動数（ラーモア振動数）は磁場に比例する．したがって，外場だけでなく，物質中の内部磁場があるとその分だけ振動数がずれる．これがナイトシフトである．内部磁場の大きさは磁気モーメント $M_i = \chi_i H_i$ に比例すると近似すると，ナイトシフトの測定は電子系の帯磁率を測定することに対応する．

また，核磁気の緩和も有用な情報を与える．電磁波の照射により励起された核スピンの $z$ 成分（$z$ 軸は磁場の方向）が電子系のスピンとの相互作用により熱平衡値へ緩和することを縦緩和，あるいは，スピン－格子緩和と呼び，その緩和時間を $T_1$ と表す．これが動的帯磁率と結びつけられることを以下に述べる．核スピン $\boldsymbol{S}$ と電子系のスピン $\boldsymbol{s}$ の相互作用を $H_{\rm HF} = \gamma \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}$ とする [*4]．一般には双極子・双極子相互作用や異方的な相互作用があり得るが，ここでは簡単な等方的な場合のみ議論する．また，核スピンの大きさは 1/2 の場合のみに着目する．磁場の大きさを $B$(方向は $z$ 軸) とすると，孤立した核スピン $\boldsymbol{I}$ のエネルギーは $H_{\rm N} = -g_{\rm N}\mu_{\rm N} I_z B$ である．ここで $\mu_{\rm N} = e\hbar/(2m_{\rm N})$．光の照射により核スピンが励起状態 $(I_z = -1/2)$ にあるとする．これが超微細相互作用 $H_{\rm HF}$ により基底状態 $I_z = 1/2$ に緩和する．その時間 $T_1$ は，フェルミの黄金則から

$$\frac{1}{T_1} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{\gamma^2}{4}\sum_{\alpha\beta}\rho_\alpha |\langle -1/2,\alpha|S_- s_+|1/2,\beta\rangle|^2 \delta(\omega+\epsilon_\alpha-\epsilon_\beta) \tag{83}$$

と与えられる．ここで $|I_z,\alpha\rangle$ は核スピンの $z$ 成分が $I_z$ であり，$\alpha$ はエネルギーが $\epsilon_\alpha$ である電子系の状態を示す指標である．遷移の初期状態において，電子系は熱平衡に達しているはずなので熱平均がとられている ($\rho_\alpha$ は電子系の分布関数)．また，電子系の終状態 $\beta$ は様々なものが考えられるから，これについても和がとられている．$\omega = g_{\rm N}\mu_{\rm N}B$ は核スピンの励起エネルギーである．デルタ関数は $\delta(\omega) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}$ と表現される

[*4] ここでの $\boldsymbol{s}$ は原点（核スピンの位置）における電子スピン（の 2 倍）であり，

$$\boldsymbol{s} = V\psi^\dagger(\boldsymbol{0})\boldsymbol{s}\psi(\boldsymbol{0}) = \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} c^\dagger_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{s}c_{\boldsymbol{k}'} \tag{81}$$

とする．一方，全スピンは

$$\boldsymbol{s} = \int d^D x\, \psi^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{s}c_{\boldsymbol{k}} \tag{82}$$

である．

から

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} &= \frac{\pi\gamma^2}{2\hbar}\sum_{\alpha\beta}\rho_\alpha\langle\alpha|s_+|\beta\rangle\langle\beta|s_-|\alpha\rangle\delta(\omega+\epsilon_\alpha-\epsilon_\beta) \\
&= \frac{\gamma^2}{4\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle s_+(t)s_-\rangle
\end{aligned} \tag{84}
$$

と整理できる．ここで $s_+(t)=e^{iHt}s_+e^{-iHt}$．$H_{\rm HF}$ に関する摂動論であったので，途中の計算では核スピン系と電子系の平均の計算は独立にしてよいことに注意．一方，動的帯磁率の虚部は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\chi_{+-}(\omega) &= \pi\frac{g^2\mu_{\rm B}^2}{4}\sum_{\alpha\beta}\frac{e^{-\epsilon_\alpha/T}-e^{-\epsilon_\beta/T}}{Z}\langle\alpha|s_+|\beta\rangle\langle\beta|s_-|\alpha\rangle\delta(\omega+\epsilon_\alpha-\epsilon_\beta) \\
&= \pi\frac{g^2\mu_{\rm B}^2}{4}(1-e^{-\omega/T})\sum_{\alpha\beta}\frac{e^{-\epsilon_\alpha/T}}{Z}\langle\alpha|s_+|\beta\rangle\langle\beta|s_-|\alpha\rangle\delta(\omega+\epsilon_\alpha-\epsilon_\beta)
\end{aligned} \tag{85}
$$

であったから，両者は

$$
\frac{1}{T_1} = \frac{2\gamma^2}{\hbar g^2\mu_{\rm B}^2}\,[n(\omega)+1]\,\mathrm{Im}\,\chi_{+-}(\omega) \tag{86}
$$

と結ばれる．ここで $n(\omega)=(e^{\omega/T}-1)^{-1}$ はボーズ分布関数．この結果は，複素感受率の虚部は緩和を表すという揺動散逸定理の一つの例である．

**コリンハ則**

ここで，金属の $T_1$ を求める．NMR における磁場の強さは電子系の特性エネルギーであるフェルミエネルギーに比べて十分に小さいから，

$$
\frac{1}{T_1} \propto \lim_{\omega\to 0}\frac{T}{\omega}\mathrm{Im}\,\chi_{+-}(\omega) \tag{87}
$$

で良い．

動的帯磁率は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\chi_{+-}(\omega) &= \frac{\pi g^2\mu_{\rm B}^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}[f(\epsilon_{\boldsymbol{k}})-f(\epsilon_{\boldsymbol{k}'})]\delta(\omega+\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\epsilon_{\boldsymbol{k}'}) \\
&= \frac{\pi g^2\mu_{\rm B}^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}[f(\epsilon_{\boldsymbol{k}})-f(\epsilon_{\boldsymbol{k}}+\omega)]D(\epsilon_{\boldsymbol{k}}+\omega) \\
&\sim \frac{\pi g^2\mu_{\rm B}^2}{2}\omega\int d\epsilon\left(-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial\epsilon}\right)D^2(\epsilon)
\end{aligned} \tag{88}
$$

と評価される．さらに $T \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$ では

$$\mathrm{Im}\,\chi_{+-}(\omega) \sim \frac{\pi g^2 \mu_{\mathrm{B}}^2}{2}\omega D^2(\epsilon_{\mathrm{F}}) \tag{89}$$

と近似して良い．したがって核磁気緩和率は

$$\frac{1}{T_1 T} = \pi\gamma^2 D^2(\epsilon_{\mathrm{F}}) \tag{90}$$

となる．すなわち，フェルミ面の状態密度に比例し，$T_1 T$ は温度に依存しない．この振る舞いをコリンハ (Korringa) 則と呼ぶ.

# 6　アンダーソン・ヒッグス機構

超伝導状態においては，電気抵抗が零になるとともに完全反磁性状態になる．これをマイスナー効果と呼ぶが，これは電磁波である光子が超伝導体内で質量を獲得したことによって発現する現象である．この現象はアンダーソン・ヒッグス機構と呼ばれている．２００８年にノーベル物理学賞を受賞した南部陽一郎の「対称性の自発的破れ」もこの超伝導におけるゲージ対称性の自発的破れとそれによる光子の質量獲得に着想を得ている．ここでは最も簡単に，超伝導の現象論によってアンダーソン・ヒッグス機構を理解する．

超伝導の秩序変数 $\Delta$ に対する現象論（ギンツブルグ・ランダウ理論）を作る．現象論においては秩序変数の微視的表現は必要ではない．また、超伝導という情報は秩序変数が実数ではなく複素数であるということだけで取り込めていることが（結果を見ると）知られている．まず，電磁場がないときのラグランジアン密度は臨界点近傍で

$$\mathscr{L} = \Delta^* i\partial_t \Delta - \frac{1}{2\tilde{m}}\boldsymbol{\nabla}\Delta^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\Delta + b|\Delta|^2 + c|\Delta|^4 \tag{91}$$

の形で与えられる．$b, c, \tilde{m}$ は現象論では任意のパラメーターである．ただし，微視的な理論からは $\tilde{m}$ はクーパー対の質量（電子質量の 2 倍）と決まる．大域的なゲージ変換 $\Delta \to e^{i\alpha}\Delta$ に対してラグランジアンは不変である．すなわち，超伝導は位相の自由度をもつ．右辺第二項目の形は回転対称性から決まる．また，臨界点近傍では $\Delta$ に関する高次の項は重要ではなく，上式に書いた次数までで十分である．

ここで電磁場を導入する．その指導原理はゲージ原理である．つまり，クーロンポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のゲージ変換

$$\phi \to \phi' = \phi + \partial_t \chi \tag{92}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \tag{93}$$

と秩序変数のゲージ変換

$$\Delta \to e^{i\tilde{e}\chi}\Delta \tag{94}$$

に対して理論が不変であるためには微分を共変微分

$$\boldsymbol{\nabla} \to \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\nabla} - i\tilde{e}\boldsymbol{A} \tag{95}$$

$$\partial_t \to D_t = \partial_t - i\tilde{e}\phi \tag{96}$$

に置き換えればよい．すなわち，

$$\mathscr{L} = \Delta^* i D_t \Delta + \boldsymbol{D}\Delta^* \cdot \boldsymbol{D}\Delta + b|\Delta|^2 + c|\Delta|^4 + \mathscr{L}_{\mathrm{em}} \tag{97}$$

が電磁場中の現象論である．ここで $\mathscr{L}_{\mathrm{em}} = (E^2 - B^2)/2$ は電磁場のラグランジアン密度．$E$ と $B$ はそれぞれ電場と磁場．

さて，秩序変数を $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$ と分ける．さらに $|\Delta|$ は時空依存性がないと簡単化すると

$$\mathscr{L} \to \tilde{e}|\Delta|^2 \left(\phi - \frac{\partial_t \theta}{\tilde{e}}\right) - \frac{\tilde{e}^2|\Delta|^2}{2\tilde{m}} \left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\theta}{\tilde{e}}\right)^2 + \mathscr{L}_{\mathrm{em}} \tag{98}$$

と表せる．位相 $\theta$ は縦波成分 $\partial_t\theta$, $\boldsymbol{\nabla}\theta$ しか現れていないので電磁場と位相の結合を見かけ上消去できる．次の量を考える．

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{\nabla}\theta}{\tilde{e}} \tag{99}$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial_t \theta}{\tilde{e}} \tag{100}$$

これは $\theta/\tilde{e}$ という関数によるゲージ変換になっていることに注意．すると，ラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \tilde{e}|\Delta|^2\tilde{\phi} - \frac{\tilde{e}^2|\Delta|^2}{2\tilde{m}}\tilde{\boldsymbol{A}}^2 + \mathscr{L}_{\mathrm{em}} \tag{101}$$

という電磁場の理論に帰着される．$\tilde{\boldsymbol{A}}$ の運動方程式 [*5] はローレンツゲージ $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$ において

$$\left(\nabla^2 - \partial_t^2 - M^2\right)\tilde{\boldsymbol{A}} = 0 \tag{103}$$

[*5] オイラー・ラグランジュ方程式

$$\left(\partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} + \frac{\partial}{\partial A^\nu}\right)\mathscr{L} = 0 \tag{102}$$

となる．ここで $M=(\tilde{e}^2|\Delta|^2/(2\tilde{m}))^{1/2}$ は光子の質量と解釈される．なぜなら，上の運動方程式から分散関係が $\omega^2=k^2+M^2$ だからである．ここまでの導出から明らかなように，光子 $\boldsymbol{A}$ が位相 $\theta$ の縦波成分を“飲み込んだ”ために“重くなった”ことになる．

上で見た質量獲得 (アンダーソン・ヒッグス機構) は，実はマイスナー効果と等価である．ここでは静的かつ一次元的な磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B_z)$ を考えよう．(103) 式は $\partial_z^2 B_z=M^2B_z$ となり解は $z>0$ で

$$B_z \propto e^{-Mz} \tag{104}$$

という減衰波 ($M^2>0$ なので) の形になる．すなわち，超伝導中では磁場は指数的に減衰してしまう．これがマイスナー効果である．明らかに，光子の質量 $M$ が磁場の減衰を生じさせる．

# 7 渦

# 付録 A 状態密度

状態密度が分かると比熱や帯磁率などの熱力学量，あるいは緩和率や超音波吸収といった動力学量も，そのおおよその振る舞いを理解することができる．この意味で，状態密度は基本的な量である．ここでは準粒子のエネルギーが $E(\boldsymbol{k})=(\xi(\boldsymbol{k})^2+\Delta^2)^{1/2}$ で表される典型的な場合について，その状態密度を求める．

状態密度 $D(\omega)$ は，形式的には

$$D(\omega)=\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\omega-E(\boldsymbol{k}))=\sum_{\boldsymbol{k}}\delta\Big(\omega-\sqrt{\xi^2(\boldsymbol{k})+\Delta^2}\Big) \tag{105}$$

と書ける．電子正孔対称性から，$D(\omega)=D(-\omega)$ であり，したがって $\omega>0$ としても一般性を失わない．上式を用いると $E(\boldsymbol{k})$ の関数の和は

$$\sum_{\boldsymbol{k}} g(E(\boldsymbol{k}))=\int d\omega D(\omega)g(\omega) \tag{106}$$

と簡単になる．まず，$\Delta=0$，すなわち常伝導状態の時には

$$D_{\mathrm{N}}(\omega)\equiv D(\omega)|_{\Delta=0}=\sum_{\boldsymbol{k}}\delta\left(\omega-|\xi(\boldsymbol{k})|\right) \tag{107}$$

である．これを用いて超伝導状態での状態密度が

$$D(\omega)=\int d\epsilon D_{\mathrm{N}}(\epsilon)\delta\Big(\omega-\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}\Big) \tag{108}$$

と書き直せる．$x=\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}>|\Delta|$ と変数変換すれば，この積分は

$$
\begin{aligned}
D(\omega) &= \int_{\Delta}^{\infty} dx \frac{x}{\sqrt{x^2-\Delta^2}} D_{\mathrm{N}}\left(\sqrt{x^2-\Delta^2}\right)\delta(\omega-x) \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2}} D_{\mathrm{N}}\left(\sqrt{\omega^2-\Delta^2}\right)\theta(\omega-\Delta)
\end{aligned} \tag{109}
$$

である．あるいは，

$$
D(\omega)=\mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2}} D_{\mathrm{N}}\left(\sqrt{\omega^2-\Delta^2}\right) \tag{110}
$$

と書いても良い．通常の金属では，フェルミエネルギーが $\Delta$ より十分に大きいから，$\Delta$ 程度の範囲では状態密度は一定に見なせる．すなわち，

$$
\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}} \sim \mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2}} \tag{111}
$$

と評価される．ここで $D_{\mathrm{N}} \equiv D_{\mathrm{N}}(0)$ はフェルミエネルギーにおける状態密度．

ここまででは $\Delta$ は定数の場合を考えている．一方で，d 波超伝導体 ($\Delta(\boldsymbol{k}) \sim \Delta\cos\theta$) など，運動量依存性が重要になることもある．その場合には，先程の状態密度の表式は

$$
\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}} \sim \int \frac{d\Omega}{S_D} \mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta(\Omega)^2}} \tag{112}
$$

と修正される．ここで $S_D$ は $D$ 次元の単位球の表面積であり，$\Delta(\Omega)=\Delta(\boldsymbol{k})|_{\xi(\boldsymbol{k})=0}$ はフェルミ面上に制限された対ポテンシャルである．以下でこの式の (数学的な) 説明する．まず，常伝導状態での状態密度は

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{N}}(\omega) &= V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\delta(\omega-|\xi(\boldsymbol{k})|) \\
&= \frac{VS_D}{(2\pi)^D}\int \frac{d\Omega}{S_D}\int_0^{\infty} dk k^{D-1}\delta(\omega-|\xi(\boldsymbol{k})|) \\
&= \int \frac{d\Omega}{S_D} D_{\mathrm{N}}(\omega;\Omega)
\end{aligned} \tag{113}
$$

と表せる．ここで角度分解した状態密度 $D_{\mathrm{N}}(\omega;\Omega)$ は

$$
D_{\mathrm{N}}(\omega;\Omega)=\frac{VS_D}{(2\pi)^D} k_{\mathrm{F}}^{D-1}(\omega;\Omega)\int_0^{\infty} dk\delta(\omega-|\xi(\boldsymbol{k})|) \tag{114}
$$

と定義される．$k$ 積分は $\boldsymbol{k}$ をフェルミ面上に制限する: $k=k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega)$, $\xi(k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega),\Omega)=\omega$ に制限する．これを用いると，$\boldsymbol{k}$ の関数 $g(\boldsymbol{k})$ の積分は

$$
V\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} g(\boldsymbol{k}) = \int \frac{d\Omega}{S_D}\int d\omega D_{\mathrm{N}}(\omega;\Omega) g(k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega),\Omega) \tag{115}
$$

となる．以上を用いると，超伝導状態での状態密度は

$$D(\omega)=\int\frac{d\Omega}{S_D}D_{\mathrm{N}}\Big(\sqrt{\omega^2-\Delta^2(k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega),\Omega)};\Omega\Big)\,\mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2(k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega),\Omega)}}\tag{116}$$

と表せる．通常の金属においては，フェルミ運動量 $k_{\mathrm{F}}$ は $\Delta$ 程度のエネルギースケールでは一定値 $k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega)\sim k_{\mathrm{F}}(\Omega)$ と見なせる．このときには

$$D(\omega)=\int\frac{d\Omega}{S_D}D_{\mathrm{N}}(\Omega)\,\mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2(k_{\mathrm{F}}(\Omega),\Omega)}}\tag{117}$$

である．$D_{\mathrm{N}}(\Omega)\equiv D_{\mathrm{N}}(0,\Omega)$ はフェルミ面上での，角度分解した状態密度．また，フェルミ面が等方的 $k_{\mathrm{F}}(\Omega)=k_{\mathrm{F}}$ とすると，$D_{\mathrm{N}}(\sqrt{\omega^2-\Delta^2(k_{\mathrm{F}}(\omega;\Omega),\Omega)};\Omega)=D_{\mathrm{N}}$，すなわち，常伝導状態における状態密度は定数であるから，

$$\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}}=\int\frac{d\Omega}{S_D}\mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta(\Omega)^2}}\tag{118}$$

となる．ここで，$\Delta(\Omega)=\Delta(k_{\mathrm{F}},\Omega)$ はフェルミ面上での対ポテンシャルである．

**例１：極状態**

例として三次元の極状態 $\Delta(\theta,\phi)=\Delta\cos\theta$ を考える．ギャップは極 $(\theta=0,\pi)$ で最大であり，赤道上 $(\theta=\pi/2)$ で零 (ラインノード) になっている．状態密度は

$$\begin{aligned}\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}}&=\int_0^\pi d\theta\frac{\sin\theta}{2}\mathrm{Re}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\Delta^2\cos^2\theta}}\\&=\omega\left|\mathrm{Re}\,\mathrm{Arccot}\Big(\sqrt{\omega^2-1}\Big)\right|\\&=\begin{cases}\dfrac{\pi\omega}{2\Delta}, & \omega<\Delta\\[2ex]\dfrac{\omega}{\Delta}\mathrm{Arccsc}\Big(\dfrac{\omega}{\Delta}\Big), & \omega>\Delta\end{cases}\end{aligned}\tag{119}$$

となる．$D(\Delta)/D_{\mathrm{N}}=\pi/2$ であり，発散はない．

**例２：平面状態**

次の例として，平面状態

$$\Delta(\theta,\phi)=\Delta\sin\theta\tag{120}$$

を考える．これは赤道上でギャップが最大になり，極で零 (ポイントノード) になっている．状態密度は

$$\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}}=\frac{\omega}{2\Delta}\ln\left|\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}\right|\tag{121}$$

と与えられる．$\omega = \Delta$ では対数発散であり，フルギャップの場合に比べて発散が弱くなっている．また，$\omega \ll \Delta$ では

$$\frac{D(\omega)}{D_{\mathrm{N}}} \sim \frac{\omega^2}{\Delta^2} \tag{122}$$

である．

# 参考文献


[1] 恒藤敏彦．超伝導・超流動, 岩波講座 現代の物理学, 第 17 巻．岩波書店, 1993．BCS 理論についてコンパクトにまとめてある．本ノートは基本的にこの本の流れに則っている．

[2] 山崎智史．修士論文「フラーレン化合物における磁性と超伝導の理論」 東北大学, 2011．多軌道系の磁性と超伝導の理論.

[3] 西川恭治, 森弘之．統計物理学．朝倉書店, 2000．統計物理学というタイトルだが多体問題の本である．経路積分から摂動展開を導入し多体問題を議論している．相転移と臨界現象，乱れの統計力学についても紹介している．

[4] 朝山邦輔．遍歴電子系の核磁気共鳴－金属磁性と超伝導－．物性科学選書. 裳華房, 2002．タイトルの通り，金属と超伝導の両方の核磁気共鳴について詳述されている．